用初等列变换解线性方程组

一、基本原理

大家知道，线性代数中求一个矩阵A的秩时，通常的办法是对A作初等行变换，变换成阶梯形矩阵后，数一数非零行的行数，这个行数就是A的秩了.

也就是将A变换成上面r行的非零行，下面是m-r行的零行的形式，上面的r行可以认为是行满秩的.

$$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}$$

而行初等变换的办法也可以用在列初等变换上, 对任一m行n列的矩阵A, 假设$r(A)=r$, 也可以经一系列的列初等变换, 变成(B, O)这样的分块矩阵的形式. 其中B是列满秩矩阵, 共有r列, 而O则有n-r列.

$$A \xrightarrow{\text{初等列变换}} (B \quad O)$$

如果在m行n列秩为$r<n$的矩阵A的下方加上一个n阶单位矩阵E_n, 按同样的列变换, 就有

$$\begin{pmatrix} A_{m\times n} \\ E_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B_{m\times r} & O_{m\times(n-r)} \\ P_{n\times r} & Q_{n\times(n-r)} \end{pmatrix}$$

陈必红定理证明了: Q的n-r个列向量,就是齐次方程组$AX=O$的基础解系.

陈必红博士学术报告会：用初等列变换解线性方程组

论文的网址是在:

http://www.paper.edu.cn/index.php/default/releasepaper/content/201012-232

二、举例说明

1. 解齐次线性方程组

要点: 并不是非要象定理那样搞成列阶梯型矩阵, 可以只做”将一列乘以常数加到另一列”的初等变换, 而”某列乘非零常数”和”交换两列”都禁止做. 只要各列之间根据方便努力相消, 导致每一个非零列的最高的不为零的元素都在不同的行即可.

例：$x_1+2x_2-x_3=0.$

系数矩阵$\boldsymbol{A}$=(1,2,-1),

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_3+c_1]{c_2-2c_1} \left(\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right)$$

得基础解系的两个向量为$(-2,1,0)^T$, $(1,0,1)^T$

例:
$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4+c_1]{\substack{c_2-2c_1 \\ c_3-c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & -4 & 0 \\ \hline 1 & -2 & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. 解非齐次线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$

要点: 与高斯消元法中增广矩阵是$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$不同在于, 列变换的增广矩阵中$\boldsymbol{B}$要加一个负号, 即增广矩阵是$(\boldsymbol{A},-\boldsymbol{B})$.

在变换开始的时候, n列的$\boldsymbol{A}$下方加n阶单位阵, $-\boldsymbol{B}$的下方加零列, 即变换开始时候的矩阵形式是:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ E & O \end{pmatrix}$$

然后, 只许做某列乘一数加到另一列的变换, 努力在上方消出尽可能多的零列.

如果上方的-***B***不能够被消成零列, 则原方程组无解. 如果消成了零列, 则零列的下方将变成方程组的特解. 在有解的情况下, ***A***中的列消成了一些零列, 它们的下方就是导出组的基础解系, 如果没有列消成零列, 则特解就是唯一解.

例

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3 \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & -7 \\ \hline 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{c_2-5c_1 \\ c_3+c_1 \\ c_4+c_1 \\ c_5-c_1}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 2 & 4 & -4 \\ 3 & -7 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & -14 & 4 & 8 & -8 \\ \hline 1 & -5 & 1 & 1 & -1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -7 & 2 & 4 & -4 \\
3 & -7 & 2 & 4 & -4 \\
1 & -14 & 4 & 8 & -8 \\
\hline
1 & -5 & 1 & 1 & -1 \\
 & 1 & & & \\
 & & 1 & & \\
 & & & 1 &
\end{array}\right)
\xrightarrow[c_5+2c_3]{\substack{c_2+\frac{7}{2}c_3 \\ c_4-2c_3}}
\left(\begin{array}{cccc:c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\
\hline
1 & -\frac{3}{2} & 1 & -1 & 1 \\
 & 1 & & & \\
 & \frac{7}{2} & 1 & -2 & 2 \\
 & & & 1 &
\end{array}\right)
$$

$(1,0,2,0)^T$是特解, $(-3,2,7,0)^T,(-1,0,-2,1)^T$是基础解系

陈必红博士学术报告会：用初等列变换解线性方程组

例
$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ x_2+x_3-4x_4=1 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 6 \\ \hline 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow[c_4+c_1]{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-2c_1 \\ c_4-3c_1}} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & -5 & -7 & 8 \\ \hline 1 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\
1 & 1 & 1 & -4 & -3 \\
2 & 1 & -5 & -7 & 8 \\
\hline
1 & -1 & -2 & -3 & 1 \\
 & 1 & & & \\
 & & 1 & & \\
 & & & 1 &
\end{array}\right)
\xrightarrow[c_5+c_2]{\substack{c_3-c_2 \\ c_4+4c_2}}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\
2 & 1 & -6 & -3 & 9 \\
\hline
1 & -1 & -1 & -7 & 0 \\
 & 1 & -1 & 4 & 1 \\
 & & 1 & & \\
 & & & 1 &
\end{array}\right)
$$

方程组无解

2010年考研题, 数学一: 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

已知线性方程组$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$存在两个不同解.

(I) 求λ,a;

(II)求$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$的通解.

解:
$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & 1 & -a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & \lambda & -1\\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right)\xrightarrow[c_4+ac_3]{\substack{c_1-\lambda c_3\\ c_2-c_3}}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & -1\\ 1-\lambda^2 & 1-\lambda & \lambda & \lambda a-1\\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ -\lambda & -1 & 1 & a\end{array}\right)$$

λ=1方程将无解, 为方程有无穷多解, λ=-1

将λ=-1代入已经变了一半的矩阵中:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & 1-\lambda & \lambda & \lambda a-1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ -\lambda & -1 & 1 & a \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -a-1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ 1 & -1 & 1 & a \end{array}\right)$$

第2列上部必须和第4列的上部成比例,否则方程组无解, 因此必有-a-1=1, 得a=-2, 再代入上面的矩阵继续变换:

$$
\left(\begin{array}{ccc:c}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -1 \\
0 & 2 & -1 & 1 \\
\hline
1 & & & \\
 & 1 & & \\
1 & -1 & 1 & -2
\end{array}\right)
\xrightarrow{c_4-\frac{1}{2}c_2}
\left(\begin{array}{ccc:c}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -1 & 0 \\
\hline
1 & & & 0 \\
0 & 1 & & -\frac{1}{2} \\
1 & -1 & 1 & -\frac{3}{2}
\end{array}\right)
$$

特解是$(0,-1/2,-3/2)^T$, 导出组基础解系是 $(1,0,1)^T$

(090311)设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}, \xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

(1) 求满足$A\xi_2=\xi_1$, $A^2\xi_3=\xi_1$的所有向量ξ_2, ξ_3;

(2) 对(1)中的任意向量ξ_2,ξ_3, 证明ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关.

陈必红博士学术报告会：用初等列变换解线性方程组

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -4 & -2 & 2\\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right)\xrightarrow[c_4-c_1]{\substack{c_2+c_1\\ c_3+c_1}}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & -2 & 2\\ \hline 1 & 1 & 1 & -1\\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow[c_4+c_3]{c_2-2c_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

因此得$\xi_2=(0,0,1)^T+k_1(-1,1,-2)^T$, k_1为任意数.

然后算得

$$A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&0&1\\-2&-2&0&-1\\4&4&0&2\\\hline 1&&&\\&1&&\\&&1&\end{array}\right)\xrightarrow[c_4-\frac{1}{2}c_1]{c_2-c_1}\left(\begin{array}{ccc:c}2&0&0&0\\-2&0&0&0\\4&0&0&0\\\hline 1&-1&&-\frac{1}{2}\\&1&&\\&&1&\end{array}\right)$$

$\xi_3=(-1/2,0,0)^T+k_2(-1,1,0)^T+k_3(0,0,1)^T$

k_1,k_2为任意数

$\xi_1=(-1,1,-2)^T$, $\xi_2=(0,0,1)^T+k_1(-1,1,-2)^T$,
$\xi_3=(-1/2,0,0)^T+k_2(-1,1,0)^T+k_3(0,0,1)^T$,
为证明它们线性无关, 将它们按列排成矩阵后做列初等变换:

$$\begin{pmatrix} -1 & -k_1 & -\frac{1}{2}-k_2 \\ 1 & k_1 & k_2 \\ -2 & 1-2k_1 & k_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-(\frac{1}{2}+k_2)c_1]{c_2-k_1c_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 1+2k_2+k_3 \end{pmatrix}$$

消不出零列, 所以线性无关.

(080311) 设n元线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^2 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) 证明行列式$|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(2) 当a为何值时, 该方程组有唯一解,并求x_1;

(3) 当a为何值时, 它有无穷多解, 并求通解.

(1) 证明行列式$|A|=(n+1)a^n$;
当a为何值时, 该方程组有唯一解,并求x_1;
当a为何值时, 它有无穷多解, 并求通解.

解: (1)用归纳法, (2)用克莱姆法则解, 超出本学术报告的范围, 而第(3)问, 当然是$a=0$时有无穷多解, 用初等列变换解更为清楚:

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & 0 \\
 & & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & 1 & 0
\end{array}\right)
\xrightarrow{c_{n+1}+c_2}
\left(\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & 1 \\
 & & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

通解: $x=(0,1,\ldots,0)^T+k(1,0,\ldots,0)^T$, k为任意数.

(070311)设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程$x_1+2x_2+x_3=a-1$有公共解, 求a的值与所有公共解.

解 将这四个方程联立并用初等列变换法求解.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1-a \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1-a \\ \hline 1 & -1 & -1 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right)$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & a-1 & 0 \\
1 & 3 & a^2-1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1-a \\
\hline
1 & -1 & -1 & \\
 & 1 & & \\
 & & 1 &
\end{array}\right)
\xrightarrow{c_3+(1-a)c_2}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 2-3a+a^2 & 0 \\
1 & 1 & 1-a & 1-a \\
\hline
1 & -1 & a-2 & \\
 & 1 & 1-a & \\
 & & 1 &
\end{array}\right)
$$

解一元二次方程a^2-3a+2=0, 得两个根1和2, 分别讨论. 从上面可以看出, 当a=2时,有唯一解, 当a=1时,有无穷多组解.

当a=2时:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow{c_4 - c_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{array}\right)$$

得解(0,1,-1)这是唯一解的情况。

下面讨论a=1的情况:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1-a \\ \hline 1 & -1 & -1 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right)$$

此时看出基础解系为$(-1,0,1)^T$, 即所有的解为$k(-1,0,1)^T$, k为任意数.

(060313)设四维向量组$\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T$, $\alpha_2=(2,2+a,2,2)^T$, $\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T$, $\alpha_4=(4,4,4,4+a)^T$, 问a为何值时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关? 当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

解: 令$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, 算出$\det(A)=(10+a)a^3$, 因此当$a=-10$或$a=0$时, 向量组线性相关.

因此要分别讨论.

当a=10时:

$$\begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -8 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -6 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_4+c_3+c_2+c_1} \begin{pmatrix} -9 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -8 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ \hline 1 & & & 1 \\ & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

验证左边三列是列满秩后,得一个极大线性无关组是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, 而$\alpha_4$=-$\alpha_1$-$\alpha_2$-$\alpha_3$.

$a=0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2-2c_1 \\ c_3-3c_1 \\ c_4-4c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -4 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

得一极大线性无关组是α_1, $\alpha_2=2\alpha_1$, $\alpha_3=3\alpha_1$, $\alpha_4=4\alpha_1$

(050313)已知齐次线性方程组

$$(I)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases} \quad (II)\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0 \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

同解, 求a,b,c的值.

解 用初等列变换法先解(I), 因为(II)只有两个方程因此肯定有无数解, 则(I)也必须有无数解.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \\ \hline 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-3c_1]{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a-3 \\ \hline 1 & -2 & -3 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

得a-3必须等于-1, 即a=2, 方程才有非零解. 将a=2代入上式右边, 继续求解,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & -2 & -3 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

因此基础解系只有一个向量为$(-1,-1,1)^T$,则(II)的基础解系也必须同样如此, 且解向量必然和$(-1,-1,1)^T$成正比, 下面解(II):

$$\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & b^2 & c+1 \\ \hline 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3 - cc_1]{c_2 - bc_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & b^2 - 2b & 1-c \\ \hline 1 & -b & -c \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

这时b^2-2b不能等于0, 1-c也不能等于0, 因为下方的向量都不能够和$(1,-1,-1)^T$成正比. 因此上面第二列定可乘一个数$k(=(1-c)/(b^2-2b))$加到第三列将第三列消成0列.即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & b^2-2b & 1-c \\ \hline 1 & -b & -c \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3+kc_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & b^2-2b & 1-c+k(b^2-2b) \\ \hline 1 & -b & -c-kb \\ & 1 & k \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

对照(I)的基础解系$(1,-1,-1)^T$, 知道k=-1, 且$-c+b=-1$, 再由$1-c-b^2+2b=0$, 得$-b^2+b=0$, 两个根0,1中,0不能用,因此$b=1$, $c=b+1=2$.

(040313)设$\alpha_1=(1,2,0)^T$, $\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T$, $\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$, $\beta=(1,3,-3)^T$, 试讨论当a,b为何值时,

(1)β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示;

(2)β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一地线性表示,并求出表达式;

(3)β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示,但表示式不唯一,并求出表示式.

解 当然还是写出矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,解线性方程组$AX=\beta$.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & -3 \\ 0 & -3a & a+2b & 3 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow[c_4+c_1]{\substack{c_2-c_1 \\ c_3+c_1}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & -b & -1 \\ 0 & -3a & a+2b & 3 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right)$$

如a=0,第3列的$(0,-b,a+2b)^T$无法将(0,-1,3)消成0, 因此方程组无解,即(1)成立. 如$a\neq 0$, 第2列能够消去第4列, 方程组有解， 这时候又分a=b和$a\neq b$两种情况. $a\neq b$有唯一解, (2) 成立

$a\neq 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & -b & -1 \\ 0 & -3a & a+2b & 3 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow{c_4+\frac{1}{a}c_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & -b & 0 \\ 0 & -3a & a+2b & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1-\dfrac{1}{a} \\ & 1 & & \dfrac{1}{a} \\ & & 1 & \end{array}\right)$$

方程组有一特解,$(1-(1/a),1/a,0)^T$, 如果$a\neq b$, 它也是唯一解.

$$\beta=(1-\frac{1}{a})\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2$$

$a\neq 0, a=b$:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & -a & -1 \\ 0 & -3a & 3a & 3 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow[c_3+c_2]{c_4+\frac{1}{a}c_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 0 & -3a & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 1-\dfrac{1}{a} \\ & 1 & 1 & \dfrac{1}{a} \\ & & 1 & \end{array}\right)$$

导出组的基础解系为$(0,1,1)^T$, 令k为任意数, 有

$$\boldsymbol{\beta}=(1-\frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_1+(k+\frac{1}{a})\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$$

(020308) 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ \cdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0, \end{cases}$$

其中$a\neq 0,b\neq 0,n\geq 2$. 试讨论a,b为何值时, 方程组仅有零解,有无穷多组解?在有无穷多组解时,求出全部解,并用基础解系表示全部解.

解: 还是先求出系数矩阵A的行列式

$$|A|=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

$|A|=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$.因此当$a=b$时和当$a=(1-n)b$时, 方程组有无穷多组解. 当$a=b$时

$$\begin{pmatrix} b & b & \cdots & b \\ b & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & b \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_n - c_1]{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \\ \cdots}} \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$k_1, k_2, \ldots, k_{n\text{-}1}$为任意数.

当$a=(1-n)b$时

$$\begin{pmatrix} (1-n)b & b & \cdots & b \\ b & (1-n)b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & (1-n)b \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_n+c_{n-1}+\cdots+c_1} \begin{pmatrix} (1-n)b & b & \cdots & 0 \\ b & (1-n)b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 0 \\ \hline 1 & & & 1 \\ & 1 & & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

不难证明左边n-1列已经是列满秩，因此通解是

$\boldsymbol{x}=k(1,1,\ldots,1)^T$　k为任意数.

(960303) 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中$a_i \neq a_j (i \neq j; i,j=1,2,\ldots,n)$, 则$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}$的解是

_______________.

解: 还是按列变换的办法解:

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & -1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & -1 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & -1 \\ \hline 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow{c_{n+1}+c_1} \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} & 0 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & 0 \\ \hline 1 & & & & & 1 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

因此填$(1,0,\ldots,0)^T$

线性方程组理论的重构

一本线性代数的教程，可以完全不考虑向量组，线性无关，向量组的秩等概念，完全不用高斯消元法的概念，就可以构造线性方程组的理论，只要有矩阵的秩，列满秩矩阵, 矩阵的各种运算，初等变换及初等矩阵及矩阵的逆的概念就足够了。

定理1 假设A是一列满秩矩阵，则方程组$AX=O$只有零解。

定理2 假设A是列满秩矩阵，则如果$AB=O$必有$B=O$。

定义1 任给矩阵A，B，如果存在矩阵K使$B=AK$，就称B可被A线性表示，或称B是A的线性表示，而K称为A对B的线性表示矩阵。

定义2 如果一个矩阵具有左上角是一个r阶单位矩阵，其它地方要么不存在，要么都是0元素，称它是左上角单位矩阵。

定理3 任何一个m行的矩阵能够被m行秩为r的左上角单位矩阵线性表示的充分必要条件，是这个矩阵的第r行之后要么不存在，要么是零行。

定义3 给定两个行数为m的矩阵$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，将它们按分块矩阵排成$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，称这样的矩阵为左右矩阵，其中左边的矩阵称之为左矩阵，右边的矩阵称之为右矩阵。

定理4 任给左右矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，对左矩阵$\boldsymbol{A}$作任意初等列变换及对整个左右矩阵作任意的初等行变换，不改变右矩阵可被或不可被左矩阵线性表示的性质。

定理5 设左右矩阵(A,B)中A是左上角单位矩阵，则B可被A线性表示的充分必要条件，是$r(A,B)=r(A)$。

定理6 对任意的左右矩阵(A,B), B可被A线性表示的充分必要条件，是$r(A,B)=r(A)$.

定理7 给定左右矩阵(A,B), A为列满秩矩阵，且$r(A,B)=r(A)$, 则B可被A唯一地线性表示。

定理8 给定左右矩阵(A,B), B可被A线性表示的充分必要条件，是存在对(A,B)作一系列的初等列变换，变成(A,O)。

定理9 任何一个秩为r的非列满秩矩阵A，必可经过一系列的初等列变换变成左右矩阵(B,C), B是列数为r的列满秩矩阵，C可被B唯一地线性表示，还可将(B,C)作进一步的初等列变换变成(B,O)的形式。

定理10 假设两个矩阵A与B满足$AB=O$, 则$r(A)+r(B)\le n$, 这里n是A的列数也是B的行数。

定义4 假设矩阵A为非列满秩矩阵，其列数为n，秩为r，矩阵B是秩为$n-r$的列满秩矩阵且满足$AB=O$, 则称矩阵B是A的一个基础解系矩阵，或简称为A的一个基础解系。

定理11 设矩阵A是非列满秩矩阵，其列数为n，秩为r，矩阵B是A的一个基础解系，则对于任何的满足$AC=O$的矩阵C，它必可被B唯一地线性表示。

定理12 设矩阵A为非列满秩矩阵，列数为n，秩为r，矩阵K_0满足$B=AK_0$, C是A的一个基础解系，则任何满足$AK=B$的矩阵K，它必可表示为$K=K_0+CQ$的形式。

谢谢大家光临！